I) Normes

Exercice 1: ★★ *b.8.2*

On définit pour $P \in E = \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |P(t)|$ et $N_2(P) = \sqrt{P(0)^2 + \int_0^A (P'(t))^2 \,\mathrm{d}t}$.

1. Démontrer succintement que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 2: ★★ *b.8.4*

Soient $d \in \mathbb{N}$ fixé par $(P_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}_d[X]$.

1. On suppose que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $P \in \mathbb{R}_d[X]$: $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} P_n(x) = P(x)$. Montrer que (P_n) converge uniformément sur tout segment J de $\mathbb{R}$: $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in J} |P_n(x) - P(x)| = 0$.
2. On suppose que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f. Montrer que nécessairement sa limite dans $\mathbb{R}_d[X]$ et que la question précédente s'applique.

Exercice 3: ★★ *b.8.8*

Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'une norme N sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ne peut pas vérifier : $\forall (A, B) \in E^2, N(AB) = N(BA)$.
2. Montrer qu'une norme N sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ne peut pas vérifier : $\forall (A, P) \in E \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), N(PAP^{-1}) = N(A)$. *On pourra exhiber une matrice A semblable à $2A$.*
3. Soit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, une semi-norme (qui est homogène et définie positive) telle que $\forall (A, P) \in E \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), N(PAP^{-1}) = N(A)$. Montrer que N est lipschitzienne, puis que $\forall (A, B) \in E^2, N(AB) = N(BA)$.
4. Montrer que $A \mapsto |\mathrm{Tr}(A)|$ convient.
5. Montrer que $\forall B \in E, (N(B) = 0) \Rightarrow (\forall A \in E, N(A + B) = N(A))$.
6. En déduire toutes les N possibles. *On pourra montrer que $\forall i \neq j, N(E_{ij}) = 0$ puis que $\forall A \in E, \mathrm{Tr}(A) = 0 \Rightarrow N(A) = 0$.*

Exercice 4: ★★ *b.8.29*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$. On note $\|.\|_{\text{op}}$: $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A & \longmapsto & \sup\limits_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \end{cases}$

appelée norme d'opérateur associée à $\|.\|$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

1. Montrer que pour toute matrice A, $\rho(A) \leqslant \|A\|_{\text{op}}$.
2. Montrer que $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\rho(A) \leqslant \left\|A^k\right\|_{\text{op}}^{\frac{1}{k}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\|.\|_{\text{op}}$ est sous-multiplicative : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\|_{\text{op}} \leqslant \|A\|_{\text{op}} \|B\|_{\text{op}}$
4. Donner un exemple de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne soit pas une norme d'opérateur.
5. Soit $\|.\|_{\infty,\text{op}}$ la norme d'opérateur associée à la norme infinie $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$.

   Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\|A\|_{\infty,\text{op}} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.
6. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure. Pour $\mu > 0$ réel, on pose $Q_\mu = \mathrm{diag}(1, \mu, \ldots, \mu^{n-1})$. Cacluler la limite de $\left\|Q_\mu T Q_\mu^{-1}\right\|_{\infty,\text{op}}$ quand $\mu \to +\infty$.
7. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une norme d'opérateur N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N(A) \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.
8. Montrer que $\rho(A) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left\|A^k\right\|_{\text{op}}^{\frac{1}{k}}$.
9. En déduire l'équivalence entre :
   (a) $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$
   (b) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \lim\limits_{k \to +\infty} A^k X = 0$
   (c) $\rho(A) < 1$
   (d) il existe sur $\mathbb{C}^n$ une norme $\|.\|$ telle que la norme d'opérateur subordonée $\|A\|_{\text{op}} < 1$.
   (e) il existe M semblable à A telle que $\|M\|_{\infty,\text{op}} < 1$ avec $\|.\|_{\infty,\text{op}}$ la norme subordonnée à $\|.\|_\infty$.

Exercice 5: ★★★ *b.8.59*

On fixe un entier $n \geqslant 1$.

1. Déterminer les plus petites constantes C et C' telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\|_2 \leqslant$

$C\|X\|_\infty$ et $\|X\|_\infty \leqslant C\|X\|_2$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\|_2 \geqslant \|X\|_\infty$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ telle que $\|AX\|_2 \geqslant \sqrt{n}\|X\|_\infty$.
3. Pour deux espaces vectoriels normés E et F de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $\|f\| = \sup\limits_{x\in E, \|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$. Lorsque $\dim E = \dim F$, on note $d(E,F) = \inf\left\{\|f\|\left\|f^{-1}\right\|, f \in \mathcal{L}(E,F)\right\}$. Détminer $d(E,F)$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni de $\|.\|_2$ et $F = \mathbb{R}^n$ muni $\|.\|_\infty$.

Exercice 6: ★★★ *b.8.5*

Soit N une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme. Montrer que N provient d'un produit scalaire.

Exercice 7: ★★★ *b.8.7*

On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, existe-t-il une norme N sur E pour laquelle la suite $(X^n)_n$ converge vers P ? On pourra commencer par $P = 0$, puis $P = 1$.

II) Intérieur, adhérence, applications continues

Exercice 8: ★ *d.45.4*

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Etablir : $\mathrm{Vect}(\overline{A}) \subseteq \overline{\mathrm{Vect}(A)}$.

Exercice 9: ★ *d.45.5*

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.
2. La partie $\mathring{A}$ est-elle convexe ?

Exercice 10: ★ *d.45.12*

Soit A une partie d'un espace normé E.

1. Montrer que la partie A est fermée *si et seulement si* $\partial A \subseteq A$.
2. Montrer que la partie A est ouverte *si et seulement si* $A \cap \partial A = \varnothing$.

Exercice 11: ★★ *b.8.14*

1. Quelle est la nature topologique de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite dans un espace vectoriel normé ?
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}-u_n = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 12: ★★ *b.8.50*

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0\,,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la forme N_∞ définie par $N_\infty(f) = \sup\limits_{t\in[0\,,1]} |f(t)|$. On note ϕ l'application définie sur E par $\phi(f) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que ϕ est une forme linéaire continue.
2. Déterminer $\|\phi\| = \sup\limits_{f\in E, N_\infty(f)=1} |\phi(f)|$ mais que cette borne supérieure n'est pas atteinte.
3. Montrer que $F = \sup f \in E, \phi(f) = 1$ est fermé et calculer la distance de la fonction nulle à f.

Exercice 13: ★★ *b.8.51*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $f : E \to E$ bornée sur la boule fermée unité et telle que : $\forall (x,y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est une application linéaire continue.

Exercice 14: ★★ *b.8.67*

Soient u un endomorphisme continu d'un espace vectoriel normé E et K un compact, convexe, non-vide de E, stable par u. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.

1. Montrer que $v_n(K) \subseteq K$.
2. Majorer indépendamment de $x \in K$, $\|u(v_n(x)) - v_n(x)\|$.
3. En déduire que u admet un point fixe dans K.

Exercice 15: ★★ *b.8.69*

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé. Soit f une application continue de K dans K telle que pour tout $(x,y) \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$. Montre que f est un homéomorphisme. Puis montrer que f est une isométrie.

Exercice 16: ★★ *b.8.22*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty\,,\alpha])$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si f est continue, alors f est s.c.i.
2. Donner un exemple de f s.c.i. mais non-continue.
3. Montrer que f est s.c.i. *si et seulement si* pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $y \in V$, $f(y) > f(x) + \varepsilon$.

Exercice 17: ★★ *b.8.24*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$. Pour tout $x \in [a\,,b]$, on se donne $\varepsilon_x > 0$ et on note $I_x =]x - \varepsilon_x\,, x + \varepsilon_x[$. Montrer que $[a\,,b]$ est recouvert par un nombre fini de I_x.

Exercice 18: ★★ *b.8.27*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

1. Dans le cas où la suite $(A^k)_k$ converge, que peut-on dire de la limite ?
2. Dans le cas général, montrer que la suite $(B_p)_p$ admet au moins une valeur d'adhérence C. Puis montrer que $AC = C$.
3. Montrer que $C^2 = C$ puis que $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Im}(A - I_n)$ et $\operatorname{Im} C = \operatorname{Ker}(A - I_n)$ (en identifiant les matrices aux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés).
4. Montrer que la suite $(B_p)_p$ converge.

Exercice 19: ★★★ *b.8.36*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des points de continuité de l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à une matrice associe son polynôme minimal.

III) Ouverts et fermés

Exercice 20: ★ *d.45.15*

Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Exercice 21: ★ *d.45.45*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 22: ★★ *b.8.25*

On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Soient $S_p = \{M \in E, \text{rg}(M) \geqslant p\}$, $I_p = \{M \in E, \text{rg}(M) \leqslant p\}$, et $A_p = \{M \in E, \text{rg}(M) = p\}$.

1. Montrer que S_p est ouvert, et I_p est fermé dans E.
2. Montrer que A_p n'est ni ouvert, ni fermé mais que $\overline{A_p} = I_p$ (que retrouve-t-on dans le cas $p = n$?).
3. Donner l'intérieur et l'adhérence de chacun des ensembles ci-dessus.

Exercice 23: ★★ *b.8.37*

On considère $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{suite bornée}\right\}$ munie de la norme infinie N_∞.

1. L'ensemble G des suites nulles à partir d'un certain rang est-il un ouvert de E ? Un fermé ?
2. On note $G_0 = \text{Vect}\{e_p, p \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $G = G_0$.
3. Déterminer l'adhérence de G.

Exercice 24: ★★ *b.8.64*

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, K une partie compacte non-vide de E.

1. Soit $(L_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de fermés non-vides inclus dans K. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n \neq \varnothing$.
2. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue $g : K \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 25: ★★ *d.45.21*

1. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que les racines ξ de P satisfont
$$|\xi| \leqslant \max\{1, |a| + |b| + |c|\}$$
2. On note $\mathcal{D} = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^2, P = X^3 + aX^2 + bX + c \text{ scindé sur } \mathbb{R}\right\}$. Montrer que

$\mathcal{D}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 26: ★★ *d.45.22*

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

1. $A = \{\text{suites croissantes}\}$.
2. $A = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$.
3. $A = \{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\}$.
4. $A = \{\text{suites périodiques}\}$.

Exercice 27: ★★ *d.45.23*

On munit l'espace des suites bornées réelles $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

1. Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble des suites (a_n) qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Exercice 28: ★★ *d.45.30*

Soit E un espace vectoriel normé. Soient F et G deux fermés non-vides et disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que :

$$F \subseteq U, G \subseteq V \text{ et } U \cap V = \varnothing$$

Exercice 29: ★★ *d.45.38*

Montrer que tout fermé peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 30: ★★ *d.45.60*

Soit $f : [0\,,1] \longrightarrow [0\,,1]$ une application continue involutive, c'est-à-dire vérifiant

$$f \circ f = f$$

1. Montrer que l'ensemble $\{x \in [0\,,1] \mid f(x) = x\}$ est un intervalle fermé et non-vide.
2. Donner l'allure d'une fonction f (non triviale) vérifiant les conditions précédentes.
3. On suppose de plus que f est dérivable. Montrer que f est constante ou égale à l'identité.

Exercice 31: ★★★ *d.45.42*

Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F + G$ est fermé.

IV) Densités

Exercice 32: ★ *d.45.95*

Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré exactement n. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est une partie ouverte et dense dans E.

Exercice 33: ★★ *d.45.97*

On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une partie dense dans l'espace des suites sommables normé par
$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$
2. $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie dense de l'espace des suites bornées normé par la norme infinie ?

Exercice 34: ★★ *b.8.15*

1. Montrer que l'ensemble $D = \left\{ \dfrac{k}{2^n}, n \in \mathbb{N}, k \in [\![0\,, 2^n]\!] \right\}$ est dense dans $[0\,,1]$.
2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Prouver que f est convexe sur I *si et seulement si* pour tout $(x, y) \in I^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

Exercice 35: ★★ *d.45.101*

Soit A une partie convexe dense d'un espace euclidien E. Montrer que $A = E$.

Exercice 36: ★★ *d.45.103*

1. Montrer que $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1\,,1]$.
2. Montrer que $\{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1\,,1]$.

Exercice 37: ★★ *d.45.107*

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose (u_n) strictement croissante, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Montrer que $A = \left\{\dfrac{u_m}{u_n} \mid m > n\right\}$ est dense dans $[1\,,+\infty[$.

Exercice 38: ★★ *d.45.110*

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ continues et de limite nulle en $+\infty$. Etablir que $\operatorname{Vect}\left\{t \mapsto e^{-nt} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est dense dans E pour la norme infinie.

Exercice 39: ★★ *d.45.117*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$.

Exercice 40: ★★ *d.45.118*

Montrer :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$$

Exercice 41: ★★★ *b.8.21*

Une partie A d'un espace normé est dite séparable si elle contient une partie dense au plus dénombrable.

1. Montrer qu'un espace normé de dimension finie est séparable.
2. Montrer que, si A est une partie séparable d'un espace normé et B une partie de A, B est séparable.
3. Soient A une partie séparable d'un espace normé, $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de A dont la réunion de A. Montrer que l'on peut extraire de $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de A.
4. Etudier la réciproque de la question précédente.

V) Convexité et connexité

Exercice 42: ⋆ *d.45.69*

Montrer que l'ensemble $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ est la réunion de deux composantes connexes par arcs.

Exercice 43: ⋆ *d.45.71*

Montrer qu'un plan privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

Exercice 44: ⋆ *d.45.74*

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes. Montrer que $\mathcal{N}$ est une partie étoilée.

Exercice 45: ⋆⋆ *b.8.84*

Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E, D une partie de E telle que $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

Exercice 46: ⋆⋆ *b.8.85*

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; en déterminer les composantes connexes par arcs.

Exercice 47: ⋆⋆ *d.45.72*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Montrer que la sphère unité est connexe par arcs.
2. A quelle condition l'intersection de deux sphères est-elle non-vide ?

Exercice 48: ⋆⋆ *d.45.84*

Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose $A \cup B$ et $A \cap B$ connexes par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs.

Exercice 49: ⋆⋆⋆ *b.8.81*

Soit E un espace vectoriel réel normé, et soit H un hyperplan de E. Montrer $E \backslash H$ est connexe par arcs *si et seulement si* H n'est pas fermé.

Exercice 50: ★★★ *b.8.88*

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices. Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs.